METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE

Octavian Cira

25 Octombrie 2005

Cuprins

Lista figurilor

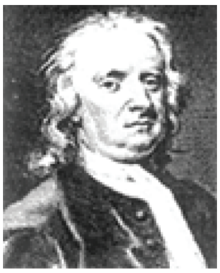
Lista tabelelor

Prefaţă

Studiul rădăcinilor polinoamelor algebrice a fost unul din cele mai prolifice subiecte în istoria milenară a matematicii. Determinarea valorii pentru care polinomul algebric se anulează a fost în atenţia a mii de matematicieni. John Michael McNamee a publicat o bibliografie pe această temă în patru ediţii [110], [111], [112] şi [113], ultima conţine conţine 32 de capitole în cadrul a peste 300 de pagini, având aproximativ 10 000 de titluri, unde apar doar rezultatele publicate în limbile de largă circulaţie internaţională (engleză, fraceză şi germană), în reviste şi edituri de prestigiu. O lucrarea de referinţă pentru tema prezentată în această carte este volumul VIII, *Numerical Solution of Polynomial Equations* din seria *Handbook of Numerical Analysis* [161], tipărită sub egida *Elsevier Science.*

Teoria matematică a ecuaţiilor algebrice este un capitol încheiat al algebrei încă de la sfârşitul secolului al XVIII-lea odată cu demonstrarea, de către Gauss (1799), a teoremei fundamentale a algebrei. A rămas deschisă problema determinării practice a soluţiilor ecuaţiilor algebrice.

Odată cu ideea genială a lui Isac Newton (1669) [116] de a aproxima rădăcina unui polinom cu punctul de intersecţie al tangentei cu axa OX, s-a deschis o nouă cale de determinare a soluţiilor ecuaţiilor. Niels Abel a demonstrat (1826) că formulele de calcul a rădăcinilor cu radicali pot fi folosite numai pentru ecuaţii algebrice de grad cel mult 4. Din acest moment era clar că determinarea soluţiilor ecuaţiilor algebrice de grad mai mare decât 4 se va putea face numai cu metode de aproximare.


Isac Newton
(1643 - 1727)

Multe cercetări au fost efectuate pentru a determina marginile rădăcinilor polinoamelor. Există o multitudine de constante care majorează şi, respectiv, minorează marginea superioară şi marginea inferioară ale rădăcinilor polinomului. În cele mai multe cazuri majorarea sau minorarea este grosieră. Prezentăm, în această carte, algoritmi de determinare a unui majorant şi, respectiv, minorant ce aproximează marginile superioară şi, respectiv, inferioară a rădăcinilor polinomului cu o precizie dată [31].

Problema are importanţa ei pentru că permite delimitarea cât mai exactă a coroanei circulare în care se găsesc toate rădăcinile complexe şi segmentele de pe axa reală care conţin toate rădăcinile reale.

Mulţi matematicieni au considerat metode noi pentru aproximarea soluţiilor ecuaţiilor algebrice: Bernoulli [55], [81], Sturm [171], Euler şi Chebyshev [158], Laguerre [100], Weierstrass [185], Bairstow [10], Muller [115], Lehmer [102], Docev [49], Durand [50], Börsch-Supan [13], [14], Kerner [87], Ehrlich [51], Jenkins şi Traub [83], Aberth [3], Halley [68], [158], [97], [11], Tanabe [174], Wang şi Zheng [182] etc. Începând cu anul 1937, Ostrowski [122] publică mai multe articole prin care demonstrează convergenţa locală a metodei Newton în cazul funcţiilor de o variabilă reală.

Rezultatul lui Kantorovich din 1948 [85], care demonstrează convergenţa pătratică a metodei Newton în spaţii generale Banach, este fundamental. Acest rezultat domină literatura de specialitate, apărând mii de articole pe această temă. După modelul dat de Kantorovich, trei probleme se pun în legătură cu metodele de aproximare a rădăcinilor polinomului: convergenţa, ordinul de convergenţă şi estimarea erorii. Pe lângă aceste direcţii de cercetare referitor la metodele numerice pentru ecuaţiile algebrice, exită multe alte teme de interes.

L. V. Kantorovich
(1912 - 1986)

Problematica stabilităţii Routh-Hurwitz a metodelor numerice [76], [155] este, începând cu secolul XX, o problemă intens studiată judecând după impresionanta bibliografie [113, capitolul Stability Questions (criteriul Routh-Hurwitz etc.)] pe această temă.

Bairstow [10] a considerat o metodă de factorizare a polinoamelor în termeni de ordinul 2. Metoda Bairstow s-ar putea chema Bairstow-Newton pentru că sistemul neliniar ce intervine în deducerea procesului iterativ este rezolvat cu metoda Newton. În această carte vom prezenta metode de tip Bairstow de ordinul 2 şi 3 pentru factorizarea polinomului care au fost numite Bairstow-secantă, Bairstow-Steffensen, Bairstow-Fridman [28], [29], [30], după cum pentru deducerea procesului iterativ, ce se face prin rezolvarea unui sistem neliniar de ordinul doi sau trei, s-a folosit metoda secantei, metoda Steffensen [170] sau metoda Fridman [60].

Mult mai târziu s-a pus problema iteraţiei de start, de aici rezultând problema bazinelor de atracţie a metodelor [32], [33], [34], [45], [40]. Foarte interesant este faptul că bazinele de atracţie pentru metode de tip Newton au o strânsă legătură cu teoria Fatou-Julia a fractalilor sau mai bine zis a atractorilor. Această observaţie s-a făcut în anul 1985 când s-a reprezentat prima dată grafic mulţimea punctelor, dintr-un pătrat, din care metoda Newton converge pentru ecuaţia $z^3 - 1 = 0$ [54].

Algoritmul Lehmer-Schur [102] este o metodă de separare a rădăcinilor polinomului cu coeficienţi complecşi, care are un neajuns importat, cu cât o rădăcină este separată mai târziu, cu atât creşte incertitudinea faţă de precizia separării. Vom prezenta o variantă proprie a acestei metode care evită acest neajuns [31]. Metoda Weyl [127] este o metodă de separare, fiind o generalizare a algoritmului de bisecţie din $\mathbb{R}$, în planul complex, unde intervalul complex este considerat pătratul. Metoda Weyl, cunoscută şi sub denumirea de construcţia Quadtree [125], este una din metodele cu cea mai mică complexitatea a calculului, fapt ce face să fie un algoritm „foarte atrăgător".

În 1981 Smale [167] defineşte noţiunea de „zero aproximativ", noţiune care stă la baza teoriei estimării punctului [141]. Această teorie permite definirea apriori a bazinelor de atracţie pentru soluţiile ecuaţiei algebrice în funcţie de metoda folosită.

Se remarcă dezvoltarea deosebită a metodelor simultane de determinare a tuturor rădăcinilor ecuaţiei algebrice [50], [49], [13], [87], [51], [3], [174], [182] etc. În legătură cu aceste metode s-au dezvoltat metodele de incluziune care folosesc o aritmetică a intervalului complex şi discurile de incluziune Gerschgorin [53], unde intervalul complex este discul. O lucrare fundamentală pentru metodele de incluziune o datorăm lui Petković [133], acelaşi autor în anul 2002 elaborează o lucrare de sinteză ce cuprinde ultimele rezultate referitoare la metodele de incluziune [137].

La ora actuală se fac eforturi importante în direcţia paralelizării algoritmilor şi a folosirii calculelor în precizii extinse pentru a rezolva ecuaţii cu grad mare (> 100) şi a obţine rădăcini cu precizii înalte.

Nu este necesar să avem un polinom de grad mare pentru a avea probleme de determinare a rădăcinilor cu o acurateţe mare, este suficient un polinom rău condiţionat sau cu rădăcini multiple pentru ca să avem dificultăţi de determinare a rădăcinilor.

Sunt interesante metodele mixte, în care se combină o metodă de separare a rădăcinilor, în faza iniţială a algoritmului, cu o metodă rapid convergentă, în partea a doua a algoritmului. La aceste metode este important criteriul prin care renunţăm la metoda de separare şi luăm în considerare metoda rapid convergentă. Teoria estimării punctului joacă un rol hotărâtor din acest punct de vedere [35], [41], [39], [36], [38].

Datorită dezvoltării tehnologice hard şi soft s-a ajus la performanţe remarcabile. Determinarea tuturor rădăcinilor pentru ecuaţiile algebrice de grad 99 nu mai constituie o problemă de timp CPU şi acurateţe de determinare. La ora actuală există pachete de calcul ştiinţific (Mathcad [104], [37], [44], Matematica, Maple, Matlab, ...), sau biblioteci de programe ştiinţifice (IMSL [1], NAG [2], DROOTS, ...) care furnizează funcţii sau programe de rezolvare a ecuaţiilor algebrice de grad mare cu precizii de 15, 24 sau 32 de cifre zecimale. Apelând la calculul simbolic se pot furniza rădăcini exacte sau cu un număr mare de zecimale exacte (100–250 cifre zecimale). Pentru a vedea ultimele probleme referitoare la rădăcinile polinoamelor se poate consulta excelentul articol a lui Burgnano şi Trigiante [18].

În această carte se prezintă peste 50 de metode de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice, unde s-au avut în vedere construcţia metodei, convergenţa, ordinul de convergenţă, estimarea erorii, bazinele de atracţie ale metodei, iar în unele cazuri s-au făcut referiri şi la complexitatea calculului. Rezultatele teoretice sunt urmate de prezentarea algoritmilor, a programelor şi a exemplelor rezolvate. Toate exemplele şi programele au fost realizate în Mathcad 2001 [37], [44]. Considerăm că această carte conţine multe programe ce pot constitui un suport de învăţare a programării în Mathcad. În exemplele date s-au preferat polinoame cu rădăcini numere întregi sau cu rădăcini complexe ce au partea reală şi partea imaginară întreagă pentru a se evidenţia uşor erorile de aproximare.

Cartea se adresează programatorilor, cercetătorilor, cadrelor didactice din învăţământul superior, studenţiilor care sunt familiarizaţi cu analiza numerică. Se prezintă suportul teoretic pentru metodele numerice şi algoritmii ce stau la baza programelor performante de rezolvare numerică a ecuaţiilor algebrice.

Demonstraţiile teoremelor şi propoziţiilor, în multe cazuri, nu pot fi parcurse şi verificate fără a avea la îndemână un soft (Mathcad, Maple, Matematica, Scientific Word, ...) ce asigură calcul simbolic şi rutine pentru rezolvarea ecuaţilor algebrice, pentru a verifica calcule complexe şi a rezolva ecuaţii algebrice de grad mare. Considerăm că acest fapt este o noutate importantă în literatura ştiinţifică din România.

Autorul deţine toate documentele Mathcad versiunea 11.0 (148 de fişiere MCD şi un fişier README.txt) pentru demonstraţiile în detaliu a teoremelor şi propoziţiilor prezentate, acestea pot fi accesate de pe CD-ul ataşat cărţii.

Mulţumesc tuturor celor care au fost alături de mine pentru scrierea acestei cărţi.

Arad, 08 Februarie 2005 Autorul

Bibliografie

[1] ***. IMSL User's Manual, 1987. Version 1.0, chapter 7.

[2] ***. *NAG Fortran Library Manual*, volume 1. Mark 13, 1988.

[3] O. Aberth. Iteration methods finding all zeros of polynomial simultaneously. *Math. Comp.*, 27:339–344, 1973.

[4] F. S. Acton. *Numerical Methods that Work*. Harper and Row, New York, 1970.

[5] A. C. Aitken. *On the factorization of polynomials by iterative methods*, chapter Studies in Practical Mathematics VI, pages 174–191. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **63**, 1951.

[6] A. C. Aitken. *On the theory of methods of factoring polynomials by iterated division*, chapter Studies in Practical Mathematics VII, pages 326–335. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **63**, 1952.

[7] A. C. Aitken. Note on the acceleration of lin's process of iterated penultimate remainder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 8:251–258, 1955.

[8] A. C. Aitken. *On the the iterative methods of Lin and Fridman for factorizing polynomials*, chapter Studies in Practical Mathematics VIII, pages 190–199. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **64**, 1956.

[9] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computation*. Academic Press, New York, 1983.

[10] L. Bairstow. *Investigations Relating to the Stability of the Aeroplane*, pages 51–64. Reports and Memoranda No 154 of Advisory Committee for Aeronautics, 1914.

[11] H. Bateman. Halley's methods for solving equations. *Amer. Math. Monthly*, 45:11–17, 1938.

[12] E. T. Bell. Exponential polynomials. *Math. Ann.*, 35:258–277, 1934.

[13] W. Börsch-Supan. A posteriori error bounds for the zeros of polynomials. *Numer. Math.*, 5:380–398, 1963.

[14] W. Börsch-Supan. Reiduenabschätzung fur Polynom nullstellen mittels Lagrange-Interpolation. *Numer. Math.*, 14:287–296, 1970.

[15] D. Braess and K. P. Hadeler. Simultaneous inclusion of the zeros of polynomial. *Numer. Math.*, 21:161–165, 1973.

[16] V. Brînzănescu and O. Stănăşilă. *Matematici speciale.* Ed. All, Bucureşti, a II-a ediţie, 1998.

[17] L. Brugnano. Numerical implementation of a new algorithm for polynomials with multiple roots. *Journal of Difference Equations and Applications*, 1:187–207, 1995.

[18] L. Brugnano and D. Trigiante. Polynomial roots: the ultimate answer? *Linear Algebra Appl.*, 225:207–219, 1995.

[19] C. Carstensen. Anwendungen von Begleitmatrizen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 71:809–812, 1991.

[20] C. Carstensen. Inclusion of the roots of a polynomial based on Gerschgorin's theorem. *Numer. Math.*, 59:349–360, 1991.

[21] C. Carstensen. On quadratic-like convergence of the means for two methods for simultaneous rootfinding of polynomials. *BIT*, 33:64–73, 1993.

[22] C. Carstensen and M. S. Petković. On iteration methods without derivatives for the simultaneous determination of polynomial zeros. *J. Comput. Appl. Math.*, 45:251–266, 1993.

[23] J. L. Chabert. *"Methods of False Position" Ch. 3 in A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip.* Springer-Verlag, New York, 1999. pp. 83-112.

[24] C. F. Chen and M. M. Chen. Performing Lin's method via Routh-type algorithms or Hurwitz-type determinants. *Proc. IEEE*, 68:1447–1449, 1980.

[25] C. F. Chen and M. H. Lin. A generalization of Lin's method for polynomial factorization. *J. Franklin Inst.*, 326:849–860, 1989.

[26] P. Chen. Approximate zeros of quadratically convergent algorithms. *Math. Comp.*, 63:247–270, 1994.

[27] O. Cira. Algorithm for the simultaneous determination of all real zeros of the polynomial from **R**[x]. In *Proceedings of the third Symposium of Mathematics and its Applications*, pages 233–242. Timişoara Research of the România Academy and "Politehnica" University of Timişoara, 3-4 November 1989.

[28] O. Cira. Metoda Bairstow. In *Proceedings of the fifth Symposium of Mathematics and its Applications*, pages 57–64. Timişoara Research of the România Academy and "Politehnica" University of Timişoara, 29-30 October 1993.

[29] O. Cira. Bairstow methods of order 3. In *Proceedings of the Seventh Symposium of Mathematics and its Applications*, pages 79–84. Timişoara Research of the România Academy and "Politehnica" University of Timişoara, 6-9 November 1997.

[30] O. Cira. Iterative methods for the determination of polynomial factors. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1494 in BAM, pages 183–190. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, September 1998.

[31] O. Cira. *Rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice*. PhD thesis, West University of Timişoara, 1998.

[32] O. Cira. The attraction basins for iterative method. In *Proceedings of the Eighth Symposium of Mathematics and its Applications*, pages 39–46. Timişoara Research of the România Academy and "Politehnica" University of Timişoara, 4-7 November 1999.

[33] O. Cira. Convergence domain of the iterative methods. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1630 in BAM, pages 124–132. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, January 1999.

[34] O. Cira. Numerical experiments for convergence domain. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1646 in BAM, pages 129–146. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, August 1999.

[35] O. Cira. Algoritmul Lehmer-Schur-Newton de rezolvare a ecuaţiilor algebrice. In *Conferinţa de Informatică Teoretică şi Tehnologii Informatice, Tehnologii informatice pentru anii 2000.* pag. 21-28. Facultatea

de Matematică şi Informatică a Universităţii „Ovidius" din Constanţa şi Institutul Naţional de Cercetare-Dezvoltare în Informatică din Bucureşti, 25-27 May 2000.

[36] O. Cira. Approximate zeros of algebraic polynomials with higer convergence order mixture methods. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1732 in BAM, pages 27–36. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, June 2000.

[37] O. Cira. *Lecţii de Mathcad*. Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

[38] O. Cira. Lehmer-Schur-Euler-Chebyshev method for approximation all zeros of algebraic polynomials. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1773 in BAM, pages 47–56. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, August 2000.

[39] O. Cira. Lehmer-Schur-Newton algorithm for solving the algebraic equation. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1723 in BAM, pages 69–78. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, April 2000.

[40] O. Cira. Numerical experiments on attraction basin. *Advanced Modeling and Optimization (AMO)*, 2(3):122–134, 2001.

[41] O. Cira. Polyzeros-hybdrid method for algebraic equations solving. In *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing SYNACS 01*, number 01-20 in RISC-Linz Report Series, pages 182–196. Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University of Linz, Austria and West University of Timişoara, 2-5 October 2001.

[42] O. Cira. Some new aspects regarding the parabola method. In *Bulletins for Applied and Computing Mathematics, Pannonian Applied Mathematical Meetings, Interuniversity Network in Central Europe*, number 1854 in BAM, pages 153–164. Caretaken by the PAMM-Centre at the Technical University of Budapest, May-June 2001.

[43] O. Cira. Parabola method-polynomial rootfinder. In *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing SYNACS 02*, RISC-Linz

Report Series, pages 76–88. Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University of Linz, Austria and West University of Timişoara, 09-12 October 2002.

[44] O. CIRA. *Lecţii de Mathcad 2001 Professional*. Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2003.

[45] O. CIRA and D. BUCERZAN. Graphics reprezentation of attraction basins for iterative method of approximating the roots to nonlinear equations. In *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing SYNACS 2000*, number 01-20 in RISC-Linz Report Series, pages 69–72. Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University of Linz, Austria and West University of Timişoara, 4-6 October 2000.

[46] J. H. CURRY. On zero finding methods of higher order from data at one point. *J. Complexity*, 5:219–237, 1989.

[47] J. C. DAUBISSE. *Sur une méthode de résolution numerique d'équations algébriques en particulier dans le cas de racines multiples*, volume Fak. Ser. Mat. Fiz. of *498-541*, pages 163–166. Univ. Beograd Publ., 1975.

[48] B. P. DEMIDOVICH and I. A. MARON. *Computational Mathematics*. Mir Publishers, Moscow, 1976.

[49] K. DOCEV. An alternative method of Newton for simultaneous calculation of all the roots of a given algebraic equation (în bulgară). *Phys. Math. J. Bulgar. Acad. Sci.*, 5(2):136–139, 1962.

[50] I. E. DURAND. *Solutions Numérique des Équations Algébriques. Équations du Type* F(x)=0*; Racines d'une Polynôme*, volume 1, pages 279–281. Masson, Paris, 1960.

[51] L. W. EHRLICH. A modified Newton method for polynomials. *Comm. ACM*, 10:107–108, 1967.

[52] G. H. ELLIS and L. T. WATSON. A paralell algorithm for simple roots of polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 2:107–121, 1984.

[53] L. ELSNER. Remark on simultaneous inclusion of the zeros of a polynomial by Gerschgorin's theorem. *Numer. Math.*, 21:425–427, 1973.

[54] B. EPUREANU and H. GREENSIDE. Fractal basins of attraction associated with a damped Newton's method. *SIAM Rev.*, 40(1):102–109, March 1998.

[55] L. EULER. *Introductio in Analysii Infinitorum*, volume 1, Chapter 17. Berlin, 1748.

[56] K. Falconer. *Fractal Geometry.* Mathematical Foundation and Applicationa. John Wiley and Sons, 1990.

[57] W. H. Flannery, S.A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1992.

[58] J. B. J. Fourier. *Oeuvres de Fourier*, volume II, pages 249–250. Gauthier-Villars, Paris, 1890.

[59] P. Fraigniaud. The Durand-Kerner polynomial root finding method in case of multiple roots. *BIT*, 31:112–123, 1991.

[60] A. M. Fridman. Proceduri iterative cu eroare minimă pentru ecuaţii operatoriale neliniare (în rusă). *Dokl. Acad. Nauk.*, 139:1063–1066, 1960.

[61] M. Frontini and E. Sormani. Modified Newton's method with third-order convergence and multiple roots. *J. Comp. Appl. Math.*, 156(2):345–354, 15 July 2003.

[62] I. Gargantini. Parallel Laguerre iterations: Complex case. *Numer. Math.*, 26:317–323, 1976.

[63] I. Gargantini. Further application of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bound for finding zeros of polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:497–510, 1978.

[64] I. Gargantini and P. Henrici. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros. *Numer. Math.*, 18:305–320, 1972.

[65] S. K. Godunov and V. S. Reabenki. *Scheme de calcul cu diferenţe finite.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

[66] G. H. Golub and T. N. Robertson. A generalized Bairstow algorithm. *Communications of the ACM*, 10(6):371–373, June 1967.

[67] W. Gregg and R. Tapia. Optimal error bounds for Newton-Kantorovich theorem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 11:10–13, 1974.

[68] E. Halley. A new, exact, and easy method of finding the roots of any equations generally, and that without any previous reduction (în latină). *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 18:136–148, 1694.

[69] E. Hansen and M. Patrick. A family of root finding methods. *Numer. Math.*, 27:257–269, 1977.

[70] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*. John Wiley, New York, 1974.

[71] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*, volume I. John Wiley and Sons, New York, 1977.

[72] D. Herceg. *An algorithm for localization of polynomial zeros*, volume Proc. of VIII Conference on Logic and Computer Science Lira'97, pages 67–75. Eds. R. Tošić and Z. Budimac, Institute of Mathematics Novi Sad, September 1-4 1997.

[73] J. Hertzberger and L. Metzner. *On the Q-order and R-order of convergence for coupled sequences arising in iterative numerical processes*, volume Mathematical Research, Vol. 89, chapter Numerical methods and error bounds, pages 120–131. Akademie Verlang, Berlin, Alefeld, G., Hertzberger, J. edition, 1996.

[74] H. H. H. Homeier. A modified Newton method for rootfinding with cubic convergence. *J. Comp. Appl. Math.*, 157(1):227–230, 1 August 2003.

[75] Z. Huang. On the approximate zero of Newton method. *Journal Zhejiang University SIENCE*, 4(1):80–85, 2003.

[76] A. Hurwitz. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reelen Teilen besitze. *Math. Ann.*, 45:273–284, 1895.

[77] S. Ilić, M. S. Petković, and D. Herceg. A note on Babylonia square-root algorithm and related variants. *Novi Sad JOM*, 26:155–162, 1996.

[78] S. M. Ilić and L. Rančić. On the fourth order zero-finding methods for polynomials. *Filomat*, 17:35–46, 2003.

[79] A. Iliev. A generalization of Obreshkoff-Ehrlich method for multiple roots of polynomial equations. *C. R. Acad. Bulg. of Sci.*, 49(5):23–26, 1996.

[80] A. Iliev. Generalization of Ehrlich-Kjurkchiev method for multiple roots of algebraic equations. Technical report, University of Plovdiv, Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Numerical Methods, Plovdiv, Bulgaria, 2003. `http://www.pu.acad.bg`.

[81] G. Jacobi. Observatiunculae ad theoriam aequationum pertnentes. *J. Reine Angew. Math.*, 3:340–352, 1835.

[82] F. H. Jelinek and E. Fernandez. Neurons and fractals: how reliable and useful are calculations of fractal dimensions? *Journal of Neuroscience Methods*, 81:9–18, 1998.

[83] M. A. Jenkins and J. F. Traub. A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7:545–566, 1970.

[84] S. Kanno, N. Kjurkchiev, and Yamamoto T. On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 13(2):267–288, 1996.

[85] L. V. Kantorovich. Functional analysis in applied mathematics (în rusă). *Uspekhi Mat. Nauk.*, 3:89–135, 1948.

[86] L. V. Kantorovich and G. Akilov. *Functional Analysis in Normed Spaces*. MacMillan, New York, 1964.

[87] I. O. Kerner. Simultaneous displacement of polynomial roots if real and simple. *Comm. ACM*, 9:273, 1966.

[88] M. Kim. On approximate zeros and rootfinding for a complex polynomial. *Math. Comp.*, 51:707–719, 1988.

[89] N. Kjurkchiev. On some modifications of Ehrlich's method for simultaneous solving of algebraic equations (în rusă). *Pliska Stud. Math. Bulg.*, 5:43–50, 1983.

[90] N. Kjurkchiev. Some remarks on Weierstrass root-finding method. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 46:17–20, 1993.

[91] N. Kjurkchiev. Initial aproximations in Euler-Chebyshev method. *J. Comput. Appl. Math.*, 58:233–236, 1995.

[92] N. Kjurkchiev and K. Mahdi. A note on remarks on the divergent starting points for Euler-Chebyshev's type methods. *Facta Universitatis*, 9:95–98, 1994.

[93] N. Kjurkchiev and K. Mahdi. Some remarks on Dvorcuk root-finding method. *BIT*, 34:319–322, 1994.

[94] N. Kjurkchiev and S. Markov. Two interval methods for algebraic equations with real roots. *Pliska*, 5:118–131, 1983.

[95] D. E. Knuth. *The Art of Programming*, volume 2. Addison-Wesley, New York, 1969.

[96] D. E. Knuth. *Tratat de programare a calculatoarelor (Algoritmi seminumerici)*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983.

[97] E. Kobald. Notice concerned with the calculation of roots of numerical equations (în germană). *Monatsh. Math. und Physik*, 2:331–332, 1891.

[98] A. Korganoff. *Méthodes de Calcul Numérique. Algèbre nonlinéaire*. Dunod, Paris, 1961.

[99] W. Krandick. Trees and jumps and real roots. *J. Comp. Appl. Math.*, 162(1):51–55, 1 January 2004.

[100] E. N. Laguerre. Sur la résolution des équations numériques. *Nouv. Ann. Math.*, 17(2):20–25, 1878.

[101] E. N. Laguerre. *Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir,... les racines d'une equation...*, volume 1. Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[102] D. H. Lehmer. A machine method for solving polynomial equation. *Journal of the ACM*, 8(2):151–162, 1961.

[103] S. Lin. A method for finding roots of algebraic equations. *J. Math. Phys.*, 22:60–77, 1943.

[104] P. Lorczak. *The Mathcad Treasury*. Mathsoft E-book, Cambridge: Mathsoft, Inc., 2002.

[105] C. Maclaurin. *A treatise of algebra*. Oxford, London, 1796.

[106] V. H. Maehly. Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen. *Z. Angew. Math. Phys.*, 5:260–263, 1954.

[107] Ş. Măruşter. *Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor neliniare*. Ed. Tehnică, 1981.

[108] Ş. Măruşter. Numerical experiments on attraction basin for tangent method in several variables. *Seminar Informatics and Computational Mathematics*, 1(1):47–55, February 2001.

[109] Ş. Măruşter. On the tangent parabola method for nonlinear equations in one variable. *Seminar Informatics and Computational Mathematics*, 1(1):1–9, February 2001.

[110] J. M. McNamee. A bibliography on roots of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 47:391–394, 1993. `http://www.elsevier.com/homepage/sac/cam/mcnamee`.

[111] J. M. McNamee. A supplementary bibliography on roots of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 78:1, 1997.

[112] J. M. McNamee. An updated supplementary bibliography on roots of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 110:305–306, 1999. `http://www.atkinson.yorku.ca/mcnamee/BIBLIOG4.html`.

[113] J. M. McNamee. A 2003 update of the supplementary bibliography on roots of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 140:1–2, 2003. `http://www.elsevier.com/homepage/sac/cam/mcnamee/2002/index.html`.

[114] N. Mihăileanu. *Istoria Matematicii.* volumul 2. Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

[115] D. E. Muller. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Math. Tables Aids Comput.*, 10:208–215, 1956.

[116] I. Newton. *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum.* Oxford, 1669.

[117] A. W. M. Nourein. An iteration formula for the simultaneous determination of the Zeroes of a Polynomial. *J. Comput. Appl. Math.*, 4:251–254, 1975.

[118] A. W. M. Nourein. An improvement on Nourein's method for simultaneous determination of the zeroes of polynomial (an algotithm). *J. Comput. Appl. Math.*, 3:109–110, 1977.

[119] A. W. M. Nourein. An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of polynomial. *J. Comput. Math.*, 6:241–252, 1977.

[120] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, New York, San Francisco and London, 1970.

[121] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* PA:SIAM, Philadelphia, 2000.

[122] A. M. Ostrowski. Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens. *Rec. Math.*, 2:254–258, 1937.

[123] A. M. Ostrowski. *Solution of Equation and Systems of Equations.* Academic Press, New York, 1966.

[124] A. M. Ostrowski. *Solution of Equations in Euclidian and Banach Space*. Academic Press, New York, 1973.

[125] V. Y. Pan. On approximating polynomial zeros: Modified quadtree (Weyl's) construction and improved Newton's iteration. Technical Report Research report 2894, INRIA, Sophia-Antipolis, France, 1996.

[126] V. Y. Pan. Optimal and nearly optimal algorithms for approximating polynomial zeros. *Comput. Math. Appl.*, 31:97–138, 1996.

[127] V. Y. Pan. Solving a polynomial equation: Some history and recent progress. *SIAM*, 39(2):187–220, June 1997.

[128] L. Pasquini and A. Trigiante. A globally convergent method for simultaneously finding polynomial roots. *Math. Comp.*, 44:135–149, 1985.

[129] H. O. Peitgen and P. H. Richter. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, 1986.

[130] M. S. Petković. On a gneralization of the root iterations for polynomial complex zeros in circular interval arithmetic. *Computing*, 27:37–55, 1981.

[131] M. S. Petković. On an iteration method for simultaneous inclusion of polynomial complex zeros. *J. Comput. Appl. Math.*, 8:51–56, 1982.

[132] M. S. Petković. Some interval iterations for finding a zero of a polynomial with error bounds. *Comput. Math. Appl.*, 14:479–495, 1987.

[133] M. S. Petković. *Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[134] M. S. Petković. On the Halley-like algorithms for the simultaneous approximation of polynomial complex zeros. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:740–763, 1989.

[135] M. S. Petković. On initial conditions for the convergence of simultaneous root finding methods. *Computing*, 57:163–177, 1996.

[136] M. S. Petković. Halley-like method with corrections for the inclusion of polynomial zeros. *Computing*, 62:69–88, 1999.

[137] M. S. Petković. Comments on some recent methods for simultaneous determination of polynomial zeros. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145(2):519–524, 15 August 2002.

[138] M. S. Petković, C. Carstensen, and M. Trajković. Weierstrass' formula and zerofinding methods. *Numer. Math.*, 69:353–372, 1995.

[139] M. S. Petković and D. Herceg. Point estimation and safe convergence of root-finding simultaneous methods. *Scientific Review*, 21-22:117–130, 1996.

[140] M. S. Petković and D. Herceg. Börsch-Supan-like methods: Point estimation and parallel implementation. *Intern. J. Comput. Math.*, 64:327–341, 1997.

[141] M. S. Petković, D. Herceg, and S. Ilić. *Point Estimation Theory and its Applications*. Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[142] M. S. Petković, D. Herceg, and S. Ilić. Point estimation and some applications to iterative methods. *BIT*, 38:111–126, 1998.

[143] M. S. Petković, D. Herceg, and S. Ilić. Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros. *Numerical Algorithms*, 17:313–332, 1998.

[144] M. S. Petković and S. Ilić. Point estimation and the convergence of the Ehrlich-Aberth method. *Publications de l'Institut Mathématique*, 62:141–149, 1997.

[145] M. S. Petković, S. Ilić, and S. B. Tričković. A family of simultaneous zero-finding methods. *Comput. Math. Appl.*, 34:49–59, 1997.

[146] M. S. Petković, M. Mignotte, and M. Trajković. The root separation of polynomials and some applications. *Z. Angew. Math. Mec.*, 75:551–561, 1995.

[147] M. S. Petković, L. Petković, and D. Zivković. *Laguerre-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros*, volume Topics in numerical analysis of *Comput. Suppl. 15*, pages 189–209. Springer, Vienna, 2001.

[148] M. S. Petković, S. Tričković, and D. Herceg. On Euler-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15:295–315, 1998.

[149] M. S. Petković and S. B. Tričković. Tchebychev-like method for simultaneous finding zeros of analytic functions. *Comput. Math. Appl.*, 31:85–93, 1996.

[150] M. S. Petković and Vranić D. V. The convergence of Euler-like method for the simultaneous inclusion of polynomial zeros. *Computers and Mathematics with Applications*, 39(7-8):95–105, April 2000.

[151] P. Popovici and O. Cira. *Rezolvarea numerică a ecuaţiilor neliniare.* Ed. SigNata, Timişoara, 1992.

[152] L. Rall. A note on the convegence of Newton's method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 11:34–36, 1974.

[153] J. Riordan. *Combinatorial Identities.* John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1968.

[154] F. Rouillier and P. Zimmermann. Efficient isolation of polynomialś real roots. *J. Comp. Appl. Math.*, 162(1):33–50, 1 January 2004.

[155] E. J. Routh. Stability of a dynamical system with two independent motions. *Proc. London Math. Soc.*, 5:97–99, 1874.

[156] S. M. Rump. Ten methods to bound multiple roots of polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 156:403, July 2003.

[157] T. R. Scavo and J. B. Thoo. On the geometry of Halley's method. *The American Mathematical Monthly*, 102:417–426, 1995.

[158] E. Schröder. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann.*, 2:317–365, 1870.

[159] I. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew Math.*, 147:205–232, 1917.

[160] I. Schur. Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew Math.*, 148:122–145, 1918.

[161] B. Sendov, A. Andreev, and N. Kjurkchiev. *Numerical Solution of Polynomial Equations (Handbook of Numerical Analysis)*, volume VIII. Elsevier Science, New York, 1994.

[162] B. Sendov and V. Popov. *Numerical Methods (în bulgară)*, volume I. Nauka i Izkustvo, Sofia, 1976.

[163] R. Şerban. Algoritmi de optimizare unidimensională. *Stud. Cercet. Cal. Eco. Ciber. Eco.*, 22:53–67, 1987.

[164] M. Shub and S. Smale. Computational complexity: on the Geometry of polynomials and a theory of costs. *I. Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 18:107–142, 1985.

[165] M. Shub and S. Smale. Computational complexity: on the geometry of polynomials and a theory of costs. *II. SIAM J. Comput.*, 15:145–161, 1986.

[166] G. Sireţchi. *Calculul diferenţial şi integral, noţinui fundamentale.* volumul I. Ed. Ştiinţifică şi Encicloppedică, Bucureşti, 1985.

[167] S. Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4:1–35, 1981.

[168] S. Smale. *The Merging Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*, chapter Newton's Method Estimates from Data at One Point, pages 185–196. R. E. Ewing, K. I. Gross and C. F. Martin, Springer-Verlag, New York, 1986.

[169] B. T. Smith. Error bounds for zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorem. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 17:661–674, 1970.

[170] J. Steffensen. Remarks on iteration. *Skand. Aktuarietidskr*, 16:64–72, 1933.

[171] C. Sturm. Mémoire sur la résolution des equations numériques. *Mém. Savants Étrangers*, 6:271–318, 1835.

[172] Z. Szabo. Uber gleinchungslosende Iterationen ohne Divergenzpunkt. *Publ. Math. Debrecen.*, 20:223–233, 1973.

[173] Z. Szabo. Newton-parabola combined method for solving equations. *Computational and Applied Mathematics I (North-Holland, Amsterdam)*, pages 447–452, 1992.

[174] K. Tanabe. Behavior of the sequences around multiple zeros generated by some simultaneous methods for solving algebraic equations (în japoneză). *Teh. Rep. Inf. Procces. Numer. Anal.*, 4(2):1–6, 1983.

[175] J. F. Traub. *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice-Hall, New Jersey, 1964.

[176] J. F. Traub and H. Wozniakowski. Convergence and complexity of Newton iteration for operator equations. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 29:250–258, 1979.

[177] P. Turan. On the approximate solution of algebraic functions. *Comm. Math. Phys. Class Hung. Acad.*, XVIII:223–236, 1968.

[178] P. Turan. The power sum method and approximative solution of algebraic equations. *Math. Comp.*, 29:311–318, 1975.

[179] A. Van der Sluis. Upper bounds for roots of polynomials. *Numer. Math.*, 15:250–262, 1970.

[180] D. WANG and F. ZHAO. The theory of Smale's point estimation and its applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 60:253–269, 1995.

[181] X. WANG and D. HAN. On dominating sequence method in the point estimate and Smale's theorem. *Scientia Sinica Ser. A*, 1:905–913, 1989.

[182] X. WANG and S. ZHENG. A family of parallel and interval iterations for finding all roots a polynomial simultaneously with rapid convergence (i). *J. Comput. Math.*, 1:70–76, 1984.

[183] X. WANG and S. ZHENG. The quasi-Newton method in parallel circular iteration. *J. Comput. Math.*, 4:305–309, 1984.

[184] X. WANG and S. ZHENG. A family of parallel and interval iterations for finding all roots of polynomial simultaneously with rapid convergence (II) (în chineză). *J. Comput. Math.*, 4:433–444, 1985.

[185] K. WEIERSTRASS. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Funktionen dertelben Verändelichen. *Ges. Werke*, 3:251–269, 1903.

[186] W. WERNER. *Iterative Solution of Nonlinear Systems of Equations*, chapter On the Simultaneous Determination of Polynomial Roots, pages 188–202. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[187] H. WEYL. Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, II, Fundamentalsatz der Algebra and Grundlagen der Mathematik. *Math. Z.*, 20:131–151, 1924.

[188] H. S. WILF. A global bisection algorithm for computing the zeros of polynomials in the complex plane. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 25:415–420, 1978.

[189] T. YAMAMOTO, S. KANNO, and L. ATANASOVA. *Topics in Validated Computations*, chapter Validated Computation of Polynomial Zeros by the Durand-Kerner Method. J. Herzberger, B. V. Amsterdam, Elsevier Science edition, 1994.

[190] F. ZHAO and D. WANG. The theory of Smale's point estimation and convergence of Durand-Kerner program (în chineză). *Math. Numer. Sinica*, 15:196–206, 1993.

[191] S. ZHENG and F. SUN. Some simultaneous iterations for finding all zeros of polynomial with high order of convergence. *Appl. Math. Comput.*, 99(1-2):233–240, 1999.